¿DEL CÁLCULO ORAL AL CÁLCULO ESCRITO? CONSTATACIONES A PARTIR DE UNA SITUACIÓN DE PROPORCIONALIDAD[1]

ALICIA AVILA[2]

Los términos *oralidad* y *escritura*, cuando se pronuncian en el ámbito de la educación matemática, refieren a dos espacios diferenciados a la vez que interconectados: el de la escuela y el de la vida. La relación entre estos dos mundos ha sido motivo de preocupación desde hace al menos un par de décadas. Es muy probable que el primer trabajo significativo en la problematización de este vínculo haya sido el titulado *Written and oral mathematics* (Carraher *et al.*, 1987; citado en Carraher, Carraher y Schliemann, 1991), en el que sus autores ponen énfasis en las diferencias de éxito en el *cálculo oral* (que consideran notable) y el *cálculo escrito escolar* (muy cercano al fracaso). A partir de entonces, numerosos trabajos se desarrollaron en América Latina con el fin de analizar los saberes construidos en la vida, dando en general un valor importante a estos saberes y cuestionando o desvalorizando los saberes que la escuela proporciona. En este trabajo abordo el vínculo entre uno y otro saber. En vez de sobrevalorar alguno de ellos, problematizo dicho vínculo y trato de mostrar la importancia del acceso a las formas de cálculo escolar, las cuales tienen un rasgo distintivo: su carácter abstracto, no local, que utiliza lenguajes específicos y se asocia a prácticas de escritura y a múltiples contextos. Empiezo por anotar algunos antecedentes al respecto.

En un trabajo previo analicé el proceso de tránsito del *cálculo oral* al *cálculo escrito*, utilizando como *saber matemático* de referencia el correspondiente a los problemas aditivos y como evidencia empírica el quehacer de un grupo de personas asistentes a un círculo de alfabetización (Avila, 2007). Las afirmaciones de ese trabajo que me interesa destacar —por resultar pertinentes en esta nueva aproximación— son las siguientes:

- No obstante que la investigación sobre el tema ha reconocido poco el valor del lenguaje matemático convencional, o las ventajas que éste puede ofrecer a las personas, en la escolarización básica de los jóvenes y adultos un objetivo central es lograr un buen manejo de las formas convencionales de cálculo escrito, basadas precisamente en la manipulación de símbolos.

[1] Este trabajo forma parte de otro muy ambicioso que analiza los aprendizajes matemáticos que se obtienen en la educación básica de jóvenes y adultos, así como las condiciones en que se dan dichos aprendizajes, realizado con la participación de Daniel Eudave, José Luis Estrada y Efraín Alcalá.

[2] Universidad Pedagógica Nacional, México.

- Identificamos la dificultad de conservar en mente el significado de los datos a los que refieren los problemas cuando se transita al cálculo escrito.
- El desafío que implica dotar de significado a la matemática escrita se acrecienta cuando quienes intentan aprenderla tienen un sistema de cálculo estructurado y estable (por lo general no escrito) y con base en él se acercan a las escrituras y procedimientos.
- Las estrategias propias del cálculo oral persisten en el pensamiento de las personas durante el proceso de adquisición de la matemática escrita.
- El proceso que lleva a un cierto manejo de los cálculos con lápiz y papel es complejo; no obstante las dificultades inherentes, es posible el tránsito de la oralidad a la escritura.

En este escrito retomo estas cuestiones desde una perspectiva y un objetivo diferentes: indagar si los trayectos escolares recorridos durante la educación básica de jóvenes y adultos influyen, modifican o potencian las formas de enfrentar situaciones problemáticas que implican la noción de proporcionalidad. No lo hago desde una perspectiva experimental y controlada, sino con el fin de examinar el problema a partir de lo que ofrece el servicio educativo al que acude este sector de población. La cuestión tiene sentido porque, supuestamente, la educación de jóvenes y adultos orienta sus esfuerzos a la adquisición y manejo de la matemática escrita como instrumento potenciador del cálculo que las personas realizan cotidianamente.

¿POR QUÉ LA PROPORCIONALIDAD?

Desarrollar la capacidad de resolver problemas de proporcionalidad es uno de los objetivos tradicionalmente incorporados en la educación básica de niños y de adultos. Esta incorporación obedece al menos a dos distintas razones señaladas reiteradamente por diversos investigadores (Avila *et al.*, 1994; Hart, 1981; Soto y Rouche, 1995): la primera, a la utilidad de la proporcionalidad en la vida cotidiana, ámbito en el que se encuentran innumerables aplicaciones de esta noción; la segunda, a su importancia en el edificio conceptual de la disciplina matemática y la física.

Nosotros incorporamos la temática como parte de nuestra indagación considerándola con este doble valor y también porque, sobre el supuesto de su utilidad cotidiana, consideramos que las personas habrían desarrollado —en distintos grados— habilidades espontáneas para lidiar con problemas de este tipo, motivo por el cual sería posible contrastar el *saber de la experiencia* con el *saber formal*, cuya adquisición se vería favorecida por la asistencia al servicio educativo.

Debido a su importancia como herramienta de resolución de problemas y como concepto clave en una estructura disciplinaria, son diversos los estudios en los que se ha abordado el tema de la proporcionalidad desde el punto de vista de su aprendizaje y su enseñanza. Sin embargo, casi todos estos estudios refieren a los procesos de comprensión del concepto por parte de niños o jóvenes que han cursado la escuela en edad temprana. Uno de los primeros estudios realizados al respecto es el del Concepts in Secondary Mathematics and Science Team (CSMS),[3] en Inglaterra, y que fue reportado por K. Hart en 1981. Según K. Hart, la mayoría de los estudiantes no logran resolver problemas en los cuales ya no es posible construir soluciones mediante estrategias espontáneas: *doblando, sacando mitad* o utilizando los *dobles* y las *mitades de los valores conocidos*. Es decir, que las estrategias escolares (escritas) son poco funcionales a la mayoría de los estudiantes para resolver problemas de proporcionalidad.

Más cercanos a la cuestión que aquí queremos abordar son los estudios realizados para analizar los saberes desarrollados fuera de la escuela, como resultado de la actividad económica y laboral que realizan las personas. Uno de ellos es el de I. Soto y N. Rouche (1995), quienes encontraron "un muy buen dominio de la proporcionalidad entre campesinos [chilenos], así como también la utilización de procedimientos de resolución de problemas bastante alejados de los que habitualmente se utilizan en la escuela" (p. 78).

El estudio de Soto y Rouche se hizo con 18 campesinos —hombres y mujeres, poco escolarizados o analfabetos— habitantes de dos comunidades rurales de Chile. Las características de uno y otro grupo son diferentes: unos comercializan sus cosechas en grandes cantidades, mientras que los otros sólo trabajan y producen para la subsistencia. En el estudio, se les pidió a los campesinos relatar las actividades que realizan cotidianamente y en este contexto se registraron las situaciones y problemas de tipo matemático que manejan, así como la forma en que las solucionan.

En sus conclusiones, Soto y Rouche (1995) afirman que los procedimientos utilizados por los campesinos se encuentran bastante alejados de los algoritmos convencionales formales; mediante estos procedimientos buscan simplificar las operaciones necesarias para resolverlos.

Por nuestra parte, y como uno de nuestros primeros acercamientos a esta temática, hace tiempo hicimos un estudio exploratorio con 36 adultos analfabetos o con escasa escolaridad, en el que aproximadamente la mitad tenían la primera condición y el resto había cursado entre tres y cinco años de educación primaria (Avila *et al.*, 1994).[4] Las conclusiones del estudio que me interesa resaltar son las siguientes:

a] En general, las personas entrevistadas mostraron haber desarrollado habilidades y procedimientos para resolver los problemas de proporcionalidad que se les presentaron; algunas de ellas, empero, vieron desdibujadas sus incipientes habilidades al enfrentarse a problemas donde era necesario obtener el valor unitario para resolverlos.

b] Con base en las soluciones y estrategias de solución observadas, conformamos cuatro grupos de personas, caracterizados por:

[3] CSMS: Programa de investigación Concepts in Secondary Mathematics and Science.

[4] En el anexo 1 se pueden ver los problemas que en ese entonces planteamos a las personas.

- *resolución de todas las situaciones planteadas*, gracias a que se cuenta con una estrategia eficaz para hacerlo: el cálculo del valor unitario;
- *uso predominante de aproximaciones*; la estrategia fundamental es la duplicación (o la obtención de mitades) de los valores conocidos, pero los resultados no se obtienen con exactitud;
- *manejo inconsistente de la proporcionalidad*; las personas resuelven algunos de los problemas planteados pero no muestran contar con estrategias ni acercamientos sistemáticos para hacerlo; se observa incluso incomprensión de algunos problemas, principalmente de los que involucran números que no se prestan a cálculo mental.

Se observó también que la asistencia a un sistema escolar no influye de manera significativa en el manejo de la proporcionalidad. En general, las personas tienen destrezas más o menos desarrolladas para resolver problemas de este tipo, independientemente de su nivel de escolaridad (Avila *et al.*, 1994, p. 93).

De esta breve revisión puede derivarse la afirmación de que los procedimientos escolares no son los más utilizados, y que los espontáneos constituyen un herramental que tarde o temprano encuentra límites, porque hay problemas cuya solución hace indispensable el cálculo del valor unitario o el uso de la regla de tres, procedimientos generales escritos cuya potencia radica en la posibilidad de resolver cualquier problema. Y es que, como señala Knijnik (2006) citando a Houaiss (2004), la matemática escolar "trasciende la naturaleza física de las cosas", el aquí y ahora de la matemática oral. En la vida cotidiana y en educación básica de jóvenes y adultos (EBPJA), la proporcionalidad ocupa un lugar importante. El conocimiento que ésta implica se desarrolla en un caso con las reglas de la oralidad, en el otro, con las reglas de la matemática escrita. Cobran entonces relevancia, en relación con dicho tema, las preguntas siguientes:

- ¿Se adquieren en la EBPJA las herramientas que constituyen los procedimientos expertos y generales propios de la matemática escrita convencional?
- ¿Se utilizan las herramientas escolares para resolver los problemas que las personas enfrentan?
- ¿La eventual posesión de dichas herramientas mejora la capacidad de resolver problemas?

NUESTRO OBJETIVO

En concordancia con las anteriores preguntas, nos interesamos en conocer qué conocimientos y herramientas aporta la EBPJA a las personas en el desarrollo de su capacidad de resolver problemas de proporcionalidad en un contexto comercial, independientemente de la actividad laboral que realizan.

En la perspectiva que sostenemos, postulamos que la adquisición de procedimientos escritos escolares potenciaría la capacidad de resolver este tipo de problemas, puesto que algunos de ellos tienen como única vía de solución los procedimientos generales que la escuela proporciona.

Para hacer la indagación se escogió el contexto comercial, porque según otros estudios (por ejemplo Mariño, 1983 y 1997; Avila, 1990 y 2007), es común para la gran mayoría de las personas adultas que en general desarrollan alguna actividad económica o laboral vinculada —así sea marginalmente— al manejo del dinero y al pago o cobro de servicios y mercancías. Con base en la perspectiva asumida, evaluamos las eventuales aportaciones de la EBPJA al manejo de la proporcionalidad en diversos sentidos que involucran aspectos propios de la *matemática escolar*:

a] La comprensión de situaciones planteadas por escrito y la capacidad de producir respuestas a las mismas.
b] La decisión de utilizar procedimientos escolares escritos: por ejemplo la regla de tres y la búsqueda del valor unitario.
c] La capacidad de lidiar matemáticamente con problemas manejables sólo mediante estos procedimientos (la regla de tres o el cálculo del valor unitario).
d] La utilización de la escritura y la simbolización matemática como herramientas de resolución de los problemas.

LA SITUACIÓN PLANTEADA

Para lograr el fin anteriormente expuesto, se planteó una situación de proporcionalidad en la que era necesario resolver seis problemas de diversa dificultad, consistentes en calcular el precio de otros tantos trozos de ate (o cajeta) de membrillo de distinto peso (véanse anexos).[5] Asimismo, se planteó un problema que implicaba comparar el precio del producto en dos establecimientos diferentes. Los seis primeros eran del tipo *valor faltante* y el último de *comparación de razones*. Este problema no será analizado en el presente escrito.

Para la resolución de los problemas se tenía como referencia la relación siguiente:

500 gramos de cajeta cuestan $30.00

Ésta es una relación entre los dos tipos de cantidades involucradas en la situación: *gramos* y *precio*, e implica una razón entre $30.00 y 500 gramos ($.06 por gramo). Todos los problemas podían resolverse utilizando esta relación. Pero también

[5] Cabe señalar que los términos *cajeta* y *ate* son equivalentes según las regiones en que se realizó la investigación, por lo que se empleó uno u otro, dependiendo del centro escolar de que se tratase.

pueden resolverse sin hacer uso de ella, fijando la atención en las relaciones al interior de un tipo de cantidades (los pesos de los distintos trozos de ate) y luego reproduciendo esas relaciones en el otro tipo (los distintos precios mencionados en el problema). Por ejemplo, observar que 250 gramos es la mitad de 500 gramos, permite concluir que el precio de 250 gramos será también la mitad del precio de 500 gramos, es decir, el precio será: la mitad de $30.00 ($15.00).[6] De forma similar, al ser el kilo el doble de 500 gramos, su precio será también el doble de $30.00 es decir, $60.00.

La situación se planteó por escrito y se solicitaba a las personas leerla cuantas veces requirieran para alcanzar su comprensión; sólo en caso de ser necesario —porque el entrevistado lo pedía, o porque las dificultades de lectura eran notorias— se ayudaba al entrevistado "releyendo con él" o "leyendo para él" el problema en voz alta.

SUPUESTOS DE LA INVESTIGACIÓN

Según nuestros supuestos, además de una eventual utilización de los procedimientos escolares escritos (el cálculo del valor unitario y la regla de tres), los problemas planteados se resolvían mediante estrategias de resolución no convencionales construidas en la experiencia cotidiana, tales como la duplicación o la obtención de mitades comentadas anteriormente.

Otro de nuestros supuestos era que quienes no habían desarrollado un buen manejo escolar de la proporcionalidad no podrían resolver, o resolverían por estimación, al menos los problemas 5, 6 y 7 (véase anexo 2), puesto que el precio de 965 gramos (y probablemente también el de 800 gramos) en nuestras previsiones, obligarían a calcular el valor unitario (o a utilizar la regla de tres).

Asimismo supusimos que las estrategias escolares escritas serían utilizadas con mayor frecuencia por las personas que habían alcanzado una mayor escolaridad, es decir, quienes cursaban o estaban por concluir la secundaria.

REALIZACIÓN DEL ESTUDIO

El estudio que realizamos —del cual el análisis de la proporcionalidad es apenas una pequeña parte— se sustentó en entrevistas a 28 personas que trataban de estudiar o certificar la educación básica (primaria o secundaria) en alguna modalidad

[6] A las relaciones que existen entre los datos de un mismo tipo, se les ha llamado "razones internas", en contraposición a la relaciones entre los dos tipos de cantidades (peso-precio en este caso) a las que se han denominado razones externas.

de EBPJA en México.[7] En el cuadro 1 se presentan los datos sobre el grado de avance en el sistema educativo de los entrevistados. Dieciocho de ellos cursaban la secundaria y diez asistían a la primaria.

CUADRO 1. Número de asistentes a la EBPJA entrevistados durante el estudio

Centro	*Jóvenes*		*Adultos*		
	Primaria	Secundaria	Primaria	Secundaria	
INEPJA semirrural (1)		3		2	
INEPJA urbano (2)		1	1	2	
INEPJA rural (3)		2	1	3	
INEPJA rural (4)	1		1	1	
Centro adjunto a universidad estatal		3	1	1	
Primaria nocturna en el D. F.			5		
Totales	1	9	9	9	/28/

RESULTADOS

¿Qué tan competentes son las personas que cursan la EBPJA al resolver los problemas de proporcionalidad en un contexto de pesos y precios? Una primera afirmación que derivo de nuestra indagación es que:

La cantidad de respuestas *correctas* que recibimos es menor que la esperable, puesto que la proporcionalidad es un tema que se trata en la educación primaria para jóvenes y adultos y se repite en la secundaria, cualquiera que sea el currículum de referencia. Pero hay discordancia entre los aprendizajes supuestos y lo observado durante la investigación:

a] la mayoría de los entrevistados no resolvió con exactitud los problemas planteados; hacerlo implicaba el manejo de herramientas escolares supuestamente disponibles en el conjunto de entrevistados;
b] en lugar de ello, se utilizan estrategias propias del cálculo oral, a lo sumo acompañadas de anotaciones de apoyo;
c] no se observan diferencias en el manejo de la proporcionalidad entre quienes cursan la secundaria y quienes cursan la primaria.

[7] Sistema INEA (Instituto Nacional para la Educación de los Adultos), Sistema de Escuelas Nocturnas para Trabajadores, centro escolar adjunto a una universidad estatal.

Si el referente es el currículum de la educación básica formal —correspondiente al plan de estudios del INEA, de las escuelas nocturnas o del centro adjunto a una universidad— se esperaría que todas las personas que cursan el último tramo de la primaria o la secundaria contaran con el herramental procedimental y simbólico del que en principio dota la escuela para resolver problemas de proporcionalidad.[8]

Pero los datos no hablan en tal sentido. La mayoría de los entrevistados únicamente dio las respuestas que es posible obtener mediante estrategias propias del *cálculo oral*: duplicando u obteniendo la mitad del valor conocido —el precio de 1 kilo y el de 250 gramos— puesto que el valor conocido era el precio de 500 gramos.

En estos dos casos, el porcentaje de respuestas *exactas* sobrepasa el 80%, y el desempeño de los estudiantes de primaria es muy similar al de los que cursan secundaria. En cambio en el resto de los problemas, que implicarían o bien estrategias espontáneas más elaboradas, o bien estrategias escolares de resolución, los porcentajes de respuestas exactas oscilan entre el 38 y el 19 por ciento.

ESTRATEGIAS UTILIZADAS Y HABILIDAD PARA RESOLVER PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD

Como ya se mencionó, nuestro supuesto era que a mayor escolaridad habría un uso más frecuente de estrategias escolares y que, utilizándolas, las personas estarían en posibilidad de resolver los problemas en que las estrategias no escolares encontraban su límite. Pero esta hipótesis no encontró sustento empírico: las personas —aun las que están por concluir la secundaria— no recurren a las estrategias escolares escritas ni en los problemas en que éstas se hacen indispensables para calcular el precio exacto. Ahora bien, si no se utilizan las estrategias escolares escritas, ¿de cuáles se sirven las personas para enfrentar los problemas de proporcionalidad? De eso se habla a continuación.

Sin estrategias para enfrentar problemas de proporcionalidad

Tres mujeres asistentes al tramo final de la primaria no proporcionaron ninguna respuesta correcta en los problemas de proporcionalidad. Dos de estas mujeres hicieron intentos por resolverlos, pero terminaron por no responder ninguna de nuestras preguntas sobre el tema. Al parecer no han desarrollado suficientes habilidades para resolver problemas de proporcionalidad.

[8] Al respecto conviene señalar que, a excepción de una entrevistada que cursaba el segundo ciclo de la primaria, el resto de los participantes cursaba el tramo final de este nivel educativo, o la secundaria, lo cual, en principio, aseguraría el estudio escolar del tema que nos ocupa.

Isabel, de 15 años y que vive en una comunidad rural, dice: "En las tiendas tienen su báscula y uno ni le entiende a esas cosas."

Lupita, por su parte, comenta: "Es que yo no hago las cuentas, voy al súper y ahí ya vienen los precios."

Es probable que, entre otros factores que inciden en esta insuficiente habilidad, se cuente el hecho de que la experiencia de vida no ha obligado a resolver problemas de este tipo, porque otras personas calculan o pesan por quienes lo necesitan. Adicionalmente, la tecnología utilizada para pesar y cobrar los productos en los almacenes modernos parece actuar en una doble vía en cuanto al desarrollo de las capacidades de cálculo: por una parte facilita e incorpora precisión en la tarea cotidiana de hacer cuentas; por otra parte, al volverlas innecesarias, inhibe el desarrollo de estrategias personales para calcular. Por supuesto, las mujeres arriba mencionadas tampoco se han apropiado de las estrategias escolares para resolver problemas de proporcionalidad.

Duplicación y mitad del valor conocido

Hubo quienes dieron respuestas exactas sólo a los problemas más sencillos que planteamos: cuando el resultado se obtenía mediante duplicación o mitad del valor conocido; en el caso de nuestro estudio el precio de 250 gramos y 1 kilo. En el diálogo con Mercedes (y con muchos otros) afloró este acercamiento:

E: [...] Si tú ya sabes que 500 gramos te lo dan a 30 pesos, éste de 250 gramos ¿cuánto crees que te lo van a dar?

M. Mmm, la mitad, ¿no?

E: ¿Y cuánto sería la mitad?

M. 15 pesos.

[...]

E. Ahora dime: ¿cuánto costará un trozo de cajeta que pese un kilo?

M. (Piensa) ¿Cien gramos es un kilo?

E. No, un kilo son mil gramos.

M. Ah... ¡¿Un kilo son mil gramos?! (sorprendida)

E. Sí.

M. (Se ríe).

E. Sí, y si el kilo son mil gramos, ¿cuánto valdrá el kilo?

M. (Pensativa, luego dice): Ah, entonces aquí sí vendrían siendo los 60 (anteriormente había dicho que 800 gramos cuestan $60.00), porque son 500 gramos, más otros 500 gramos, serían mil.

E. Entonces, ¿cuánto valdría el kilo?

M. Mmm, a 60.

[...]

Ésta es una estrategia muy utilizada en la vida diaria, que permite obtener los precios sobre la base de la duplicación u obtención de la mitad de los valores conocidos en los casos más simples y sin recurrir al lápiz y el papel. Muchos de nuestros entrevistados recurrieron a ella. Sin embargo, esta forma de proceder no basta para obtener respuestas exactas o aproximaciones aceptables en problemas más complejos (por ejemplo, el cálculo de 800 y 965 gramos). Veamos de nuevo el diálogo con Mercedes:

E. Y ahora, ¿qué pasa con éste de 800?, ¿sí vale 60? (recuérdese que inicialmente comentó que los 800 gramos valían $60.00).

M. ¡No!

E. No, ¿verdad?, ¿como cuánto crees que puede valer?

M. (Piensa, no hace nada.)

E. ¿Más de 60 o menos de 60?

M. Menos.

E. Menos, ¿como cuánto?

M. (Se queda pensativa).

E. ¿Cuánto menos, Mercedes, *más o menos*? (esta última frase indica que haga una estimación, aunque no obtenga un resultado exacto)

M. (Continúa en silencio, finalmente dice): Como 50, ¿no?

E. Apúntale, y ¿me puedes decir por favor cómo calculaste los 50?

M. Bueno, si aquí son 500 gramos, y aquí son 800 gramos, eso es lo que sale: 50

Llama la atención que un número importante de nuestros entrevistados resolvió de esta forma y sólo estos problemas, dejando sin resolver los más complejos, como si la asistencia al servicio educativo no hubiese aportado ningún elemento adicional a la forma de abordar las situaciones de proporcionalidad en la vida cotidiana.

Sumas (o restas) de duplicaciones (o mitades) sucesivas

También se construyeron respuestas mediante sumas o restas de los valores conocidos y/o mitades y dobles sucesivos de los mismos. Según esta forma de operar, la estrategia para calcular el precio de 375 gramos, conociendo la relación 500 gramos = $30.00, se traduce en cálculos como el que se esquematiza en la figura 1.

Peso	Precio
500	30
+ 250	15 +
125	7.5
375	22.50

Figura 1. Resolución mediante suma de mitades sucesivas del valor conocido.

Esta estrategia se complica al calcular otros valores —por ejemplo el precio de 800 o 965 gramos— pues las composiciones necesarias son más largas y no necesariamente llevan a resultados exactos. Por ejemplo, no es posible obtener con exactitud el costo de 965 gramos con esta estrategia, tampoco el de 800 gramos, pues por más duplicaciones y mitades que se obtengan, su adición o sustracción no conducirá al resultado preciso. Seguramente por eso hay quienes han ideado otra estrategia que aproxima al *valor de la unidad.*

Uso de una unidad distinta de uno

Tres entrevistados[9] pusieron en marcha una estrategia que aproxima a la conceptuación del valor unitario como herramienta para resolver problemas de proporcionalidad; sólo que la *unidad* es 100 gramos, o 50 gramos. Adicionalmente, es posible subdividir la unidad y utilizar *media unidad* (por ejemplo 25 gramos) para obtener resultados bastante cercanos al precio exacto del producto; con esta forma de operar es posible resolver casi todos los problemas propuestos. Por ejemplo, el precio de 800 gramos, considerados 100 gramos como unidad, puede calcularse de la manera siguiente:

En el peso:

$$(100 \times 5) + (100 \times 3) = (100 \times 8) = 800,$$

que corresponde al cálculo paralelo:

En el precio:

$$(6 \times 5) + (6 \text{ x } 3) = (6 \times 8) = 48$$

y que permite obtener el precio:

$$800 \text{ gramos} = \$48$$

La estrategia basada en un valor no unitario, no permite obtener con exactitud el precio de 965 gramos; éste se mantiene sólo en una aproximación bastante buena —el precio de 975 gramos— que es resultado de calcular tomando como *unidad* el precio de 50 gramos e incorporando, en su momento, la mitad de dicha *unidad* (25 gramos).

Los cálculos paralelos a que da lugar esta estrategia son los siguientes:

[9] Formado por dos asistentes a primaria y una a secundaria.

En el peso:

$$(50 \times 16)^{10} + (50 \times 2) + 50 = 800 + 100 + 50 = 950$$
$$950 + (½\ 50) = 950 + 25 = 975$$

En el precio:

$$(3 \times 16) + (3 \times 2) + 3 = 48 + 6 + 3 = 57$$
$$57 + (½\ 3) = 57 + 1.50 = 58.50$$
$$975\ g = 58.50$$

Esta estrategia, aunque bastante potente, no es una estrategia general que posibilite la obtención de resultados exactos en todos los casos. Otra cuestión para hacer notar es que al tratar de calcular el valor de 800 y 965 gramos, algunos entrevistados necesitaron escribir, de tal suerte que usaron registros personales como apoyo de su cálculo mental. No obstante el apoyo de la escritura, no obtuvieron las soluciones exactas.

Las personas que cuentan con una estrategia útil para obtener cualquier precio en la situación planteada son las que utilizan la estrategia que explicamos en seguida. De nuevo se trata de una estrategia no escolar.

Manejo de la proporcionalidad mediante la regla de tres situada

El procedimiento que he llamado *regla de tres situada* consiste en lo siguiente: *Multiplicar el peso del producto solicitado por el precio del kilo del mismo, para luego colocar el punto decimal en el lugar que los indicadores del contexto señalan como pertinente.*

El término *situada* refiere precisamente al hecho de que el conocimiento y uso del procedimiento tienen una amplia dependencia del contexto. De hecho, su aprendizaje deriva de las exigencias del ámbito en que se aplica cotidianamente: el comercio de frutas, verduras y otros productos alimenticios que es necesario pesar para cobrar correctamente (proporcionalmente) conforme a dicho peso.

Los cálculos implicados en esta estrategia corresponden a los que permiten resolver mediante la *regla de tres convencional.* Ignacio comentó que el dueño de la verdulería donde se contrató como empleado por un tiempo, le dijo: "Aquí se trabaja así: se multiplica el peso (del producto) por el precio (del kilo)."

La estrategia, que parece incompleta según las palabras de Ignacio, se complementa con la "colocación del punto" (resultante de la división involucrada en la regla de tres) en el lugar que la realidad indica como razonable. La resolución en

[10] La relación "50 cabe 16 veces en 800" se obtuvo en el problema anterior.

el cuaderno de Ignacio, quien tiene notablemente automatizada la estrategia, permitirá comprenderla mejor:

Ignacio lee en voz baja el problema, luego dice: "Aquí es de sacar el precio" y se pone a resolver, los cálculos y resultados que va anotando son:

$$\begin{array}{rl} 375 \text{ gramos} & \\ \times 6 & \\ \hline 2250 & \quad 22.50 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 800 & \\ \times 6 & \\ \hline 4800 & \quad 48.00 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 965 & \\ \times 6 & \\ \hline 5790 & \quad 57.90 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 250 & \\ \times 6 & \\ \hline 1500 & \quad 15.00 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 50 & \\ \times 6 & \\ \hline 300 & \quad 3.00 \end{array}$$

E. [...] Dime cómo sacaste, por ejemplo... El [precio de] de 50 gramos

I. Multipliqué 50 por 6.

E. ¿Por 6?, ¿por qué por 6?

I. Porque, podría multiplicar por 60, bueno, en este caso por 6.

E. ¿Por qué por 6?

I. Porque por ejemplo, un kilo de jitomate cuesta... digamos que 60, es un decir, supongamos que un kilo de jitomate cuesta 60, se multiplican los gramos por lo que cuesta, por 60, pero para no hacer tanto número, tanto cero, le quito el cero y multiplico por 6, ya al final de las cuentas le pongo los ceros que le faltan...

E. ¿Y cómo hiciste, por ejemplo, en el de 250 gramos?

I. Igual, todos fueron de la misma forma, porque en todos la cajeta vale lo mismo, lo único que varía son las cantidades, los trozos, que unos son grandes y otros pequeños; pero como tiene el mismo precio se multiplica el 6, y el cero se pone ya al final, porque, es un decir, entre comillas, que el cero no tiene valor, es al final de cuentas donde se le ve.

Es decir, que en la *regla de tres situada* se combina una estrategia parcialmente incomprensible (no necesariamente se tiene una explicación de por qué se multiplica y se divide lo que se multiplica y se divide), con el buen juicio de la experiencia cotidiana. De la conjunción de ambos elementos deriva una habilidad importante para resolver los problemas de proporcionalidad de tipo *valor faltante*. La habilidad para resolver de este modo se potencia con los registros escritos o el uso de la calculadora, auxiliar que parece ser bien apreciado por las personas dedicadas al comercio.

Los datos recabados apuntan a que es en el contexto de la actividad laboral y comercial en donde se desarrolla dicho conocimiento, puesto que cuatro de las personas que utilizan la estrategia (a la quinta no se le preguntó) afirmaron trabajar o haber trabajado un tiempo largo en una tienda de abarrotes o en una frutería. En estos establecimientos comerciales —según el decir de los entrevistados— se hace necesario pesar y calcular el precio de algunos de los productos en venta, por ejemplo la fruta, la verdura, el café o los frijoles. La capacidad de resolver de este modo los problemas de proporcionalidad, en principio hace necesaria la escritura, pero la exigencia cotidiana de atender con prontitud a los compradores, obliga a buscar estrategias que permitan calcular más rápidamente, como el uso de la calculadora. Algunos de nuestros entrevistados la usaron espontáneamente.

CONCLUSIONES

En este escrito examiné el manejo de la proporcionalidad en contexto de pesos y precios con un grupo de asistentes a la EBJA. En particular me interesó analizar la incorporación de los procedimientos y simbolismos escolares en la resolución de problemas de tipo *valor faltante*. Es decir, me interesó indagar —a partir de dicho contenido— la apropiación de la matemática escrita y el conjunto de reglas que permiten utilizarla. Conforme a la postura asumida, postulé una relación entre el manejo de procedimientos escritos y generales de cálculo y la capacidad de resolver cierto tipo de problemas de proporcionalidad. De acuerdo con los datos recabados:

- No hay relación entre el nivel de escolaridad y las habilidades que las personas muestran para resolver los problemas de proporcionalidad en contexto de pesos y precios.
- Las personas no utilizan los procedimientos propios de la matemática escolar que la EBPJA supone comunicar para resolver dichos problemas, *ni aún cuando la determinación de precios exactos hace indispensable dicho uso*. Llama la atención que ninguna persona —ni aún las que están por concluir la secundaria— utilizó la *regla de tres convencional* o la *búsqueda del valor unitario*, procedimientos escritos que supuestamente se comunican en el sistema educativo.

Al contrario, hay un predominio de estrategias espontáneas propias del cálculo oral al resolver problemas de proporcionalidad. Este resultado coincide con los de otras investigaciones previas sobre el tema. La relevancia de los datos, en este caso, radica en que según nuestros estudios previos las cuestiones de dinero —como por ejemplo fijar precios— impactan en la economía de las personas, por lo que obligan a la búsqueda de exactitud. Pero al parecer estas personas no tienen disponibles las estrategias escritas que supuestamente se adquirirían en la escuela y que permitirían fijar los precios con exactitud.

Es decir, que aunque los saberes de la experiencia encuentran su límite en los problemas donde es necesario conocer el *valor unitario*, la pérdida de eficacia no lleva a movilizar estrategias escritas escolares. Es en este punto donde mostraría su valor la acción de la escuela. Empero, quienes saben calcular precios exactos cuando los procedimientos espontáneos ven su límite, son quienes lo han aprendido en el trabajo. En efecto, sólo quienes utilizan la *regla de tres situada* —utilizada por los comerciantes— resuelven con exactitud todos los problemas de proporcionalidad que les planteamos.

La *regla de tres situada*, en palabras de Ignacio, consiste en: "Multiplicar el peso (del producto) por el precio (del kilo)", *para luego anotar el punto decimal en el lugar que indicadores del contexto señalen como pertinente.*

Éste es un aprendizaje de la experiencia laboral, no de la escuela, que en parte es trasmitido ("el dueño me dijo: aquí se calcula así"), y en parte es validado mediante el buen juicio producto de la experiencia. Este procedimiento sirve para resolver un cierto tipo de problemas, los de valor faltante; queda por indagar si, para problemas de proporcionalidad con una estructura distinta (como los de comparación de razones), las personas tienen también estrategias de resolución disponibles.

Estos resultados llaman a destacar dos cuestiones vinculadas:

a] La función de la EBPJA en el desarrollo de herramientas simbólicas que permitirían potenciar las habilidades de cálculo desarrolladas en la vida y facilitarlas mediante la incorporación de estrategias generales de resolución.
b] La importancia de los procedimientos generales, los que "separan al que sabe de lo sabido" (Ong, 1996, p. 51), los que permiten tomar distancia y utilizar los conocimientos en otras situaciones o, como dijera G. Brousseau: "hacer del conocimiento algo universal, reutilizable" (1986).

A juzgar por los resultados obtenidos en relación con la proporcionalidad, la EPBJA parece no estar cumpliendo una tarea fundamental que la escolarización tiene comprometida: dotar de herramientas simbólicas que potencien las habilidades y destrezas que las personas han desarrollado en su experiencia de vida.

Cobran entonces relevancia otras preguntas: ¿Por qué en la EBPJA no se adquieren los procedimientos expertos y generales útiles para enfrentar problemas donde la proporcionalidad está implicada? Adelanto varias tentativas de respuesta:

a] porque las personas no interactuaron, durante la escolaridad básica, con los procedimientos escritos vinculados a la proporcionalidad;
b] porque los acercamientos no fueron significativos y por ello se mantienen las estrategias construidas en la experiencia de vida, predominantemente orales;

c] porque quienes fungen como educadores no tienen las habilidades necesarias para hacer transitar, significativamente, de una a otra forma de operar;

d] porque el tránsito de la oralidad a la escritura es más complejo de lo que hasta ahora hemos querido suponer.

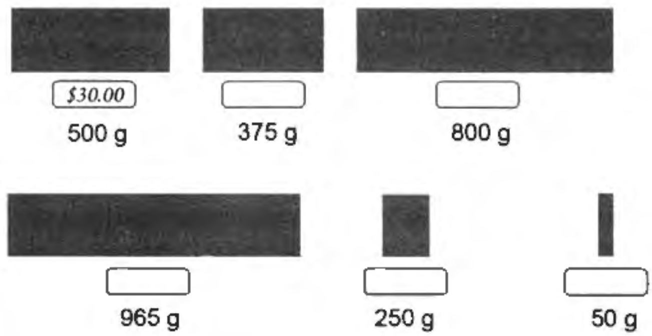
En una investigación previa, en la cual nuestro referente fueron los problemas aditivos y los procedimientos de cálculo correlativos, constatamos que el tránsito significativo y funcional del cálculo oral al escrito es un proceso complejo (Avila, 2007). Hacerlo posible implica un conocimiento importante de los saberes previos y procesos cognitivos de los estudiantes de la EBPJA; implica también una voluntad explícita de lograr dicho tránsito. Es poco probable que ambos elementos se conjuguen en el contexto en que se desarrolla la educación de jóvenes y adultos en México y en otros países latinoamericanos; y sin embargo el tránsito es necesario. Sobre este punto anoto una última reflexión.

La educación matemática, dice Knijnik, es "un terreno en el que determinados grupos acaban por imponer su modo de razonar como la única racionalidad posible" (Knijnik, 2006, p. 152). Mi interés por la matemática escrita no es expresión de una postura proclive a la escolarización, al formalismo, o a la dominación intelectual. Se trata más bien de una postura que reconoce el valor de las herramientas simbólicas de las que puede dotar la escuela porque, como constaté ya en otra parte (Avila, 2007) —y como creo haber mostrado aquí— la capacidad de registrar mediante símbolos el pensamiento y de elaborar con dichos símbolos modelos generales reutilizables en otras situaciones, se traduce en un poderoso amplificador de la capacidad operatoria. No me queda duda de que es compromiso ineludible de la escuela potenciar las capacidades de quienes asisten a ella. Cumplir tal compromiso hace necesario comprender los conocimientos y formas de hacer de las personas y luego traducirlos en una didáctica incluyente.

ANEXO 1

Situación de proporcionalidad propuesta en este estudio

En la tienda de don Fernando empacan trozos de cajeta de membrillo de distinto peso. Ya pusieron la etiqueta a un paquete. Fíjese en el precio y complete las etiquetas que faltan.



¿Cuánto costaría el trozo de un kilo de cajeta de membrillo?

En la tienda de don Andrés un trozo de 750 gramos de cajeta de membrillo cuesta $50.00. ¿En dónde es más barata la cajeta de membrillo?

ANEXO 2
Situación ates de membrillo

Situación problemática	*Respuesta*	*Estrategia supuesta*	*Razón o propiedad utilizada*
1] 250 gramos	$15.00	Obtener mitad	Razón interna
2] 1 kilo	$60.00	Duplicar	Razón interna
3] 50 gramos	$50.00	División entre 10	Razón interna
4] 375 gramos	$22.50	Obtención y suma de mitades sucesivas	Razón interna; suma de imágenes
5] 800 gramos	$48.00	(búsqueda de valor unitario o regla de tres)	Razón externa
6] 965 gramos	$57.90	(búsqueda de valor unitario o regla de tres)	Razón externa
7] ¿Qué es más caro: 750 gramos a $50.00 o al precio que lo da don Fernando?	Al precio que lo da don Fernando	Búsqueda de valores unitarios y comparación de los mismos	Razones externas, y comparación de dichas razones

REFERENCIAS

Avila, A. (1990), "El saber matemático de los analfabetos. Origen y desarrollo de sus estrategias de cálculo", *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*. CEE, 20 (3), pp. 55-95.

—— (2007), "Del cálculo oral al cálculo escrito: Reelaborar para acceder a una nueva significación", *Recherches en Didactique des mathématiques*, 27 (3), pp. 313-347.

Avila, A., J. L. Cortina, L. Nakamura y V. Salgado (1994), *Conceptualizaciones sobre las fracciones, los decimales y la proporcionalidad*, reporte de investigación inédito, México, INEA.

Brousseau, G. (1986), *Théorisation des phénomenes d'enseignement des mathématiques*, tesis doctoral, Universidad de Burdeos I, Burdeos.

Carraher, T. N., D. Carraher y A. Schliemann (1991), "Matemáticas escritas versus matemáticas orales", en *En la vida diez, en la escuela cero*, pp. 48.71, México, Siglo XXI Editores.

Hart, K. M. (1981), "Ratio and proportion", en K. M. Hart. (ed.), *Children's understanding of mathematics: 11-16*, vols. 88-101, Chippenham, Antony Rowe Publishing Services.

Houaiss, A. (ed.) (2004), *Dicionário eletrônico da lingua portuguesa*, versión en CD-ROM, São Paulo, Editora Objetiva.

Knijnik, G. (2006), "La oralidad y la escritura en la educación matemática. Reflexiones sobre el tema", *Educación Matemática*, vol. 18, núm. 2, pp. 149-165.

Mariño, G. (1983), *¿Cómo opera matemáticamente el adulto del sector popular? Constataciones y propuestas*, Bogotá, Dimensión Educativa.

—— (1997), "Los saberes matemáticos previos de jóvenes y adultos: Alcances y desafíos", en U. D'Ambrosio, O. Jóia, G. Knijnik, N. Duarte, D. L. de Carvalho, G. Mariño, A. Alicia *et al.* (eds.), *Conocimiento matemático en la educación de jóvenes y adultos*, pp. 77-100, Santiago de Chile, Unesco.

Ong, W. J. (1996), *Oralidad y escritura. Tecnologías de la palabra*, México, Fondo de Cultura Económica.

Soto, I. y N. Rouche (1995), "Problemas de proporcionalidad resueltos por campesinos chilenos", *Educación Matemática*, 7 (1), pp. 77-96.